TKS 4007
Matematika III

Fungsi Kompleks

(Pertemuan XXVII - XXX)

Dr. AZ
Jurusan Teknik Sipil
Fakultas Teknik
Universitas Brawijaya

Pendahuluan

- Persamaan $\boldsymbol{x^2+1=0}$ tidak memiliki akar dalam himpunan bilangan real.
- Pertanyaanya, dapatkah dibangun suatu lapangan baru yang memuat akar dari persamaan tersebut?
- Misal didefinisikan $\boldsymbol{i}$ sebuah bilangan yang memenuhi $\boldsymbol{i^2=-1}$, tetapi ada dua buah akar dari $\boldsymbol{x^2+1=0}$, yang manakah yang akan dipilih sebagai $\boldsymbol{i}$?
- Jika sudah dipilih $\boldsymbol{i}$, apakah perlu mendefinisikan persamaan $\boldsymbol{x^4+1=0}$ sebagai $\boldsymbol{j}$ atau cukup dengan definisi sebelumnya, sehingga semua polinom di lapangan baru tersebut mempunyai akar-akarnya.

Pendahuluan *(lanjutan)*

- Sebuah bilangan kompleks dapat disajikan dalam dua bentuk :
  1. $\boldsymbol{z = x + iy}$
  2. $\boldsymbol{z = (x, y)}$

  $\boldsymbol{x}$ adalah bilangan riil dan $\boldsymbol{y}$ adalah bagian imaginernya dan bisa ditulis sebagai : $\mathbf{re}\ \boldsymbol{z = x}$

  $\mathbf{im}\ \boldsymbol{z = y}$
- Contoh :

  $\mathbf{2 + 3}\boldsymbol{i} \rightarrow \quad \mathbf{re}\ (\mathbf{2 + 3}\boldsymbol{i}) = \mathbf{2}$

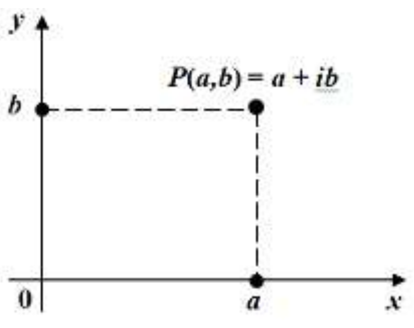
  $\mathbf{im}\ (\mathbf{2 + 3}\boldsymbol{i}) = \mathbf{3}$

Bidang Kompleks

- Bilangan kompleks digambarkan dalam suatu bidang kompleks seperti penggambaran suatu titik pada bidang kartesius ***xy***.

  sumbu ***x*** = sumbu riil

  sumbu ***y*** = sumbu imaginer



Bidang Kompleks *(lanjutan)*

- **Operasi pada bidang kompleks :**

  Jika $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ dan $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$

  1. Penjumlahan

     $\boldsymbol{z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)}$

  2. Perkalian

     $\boldsymbol{z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$

  3. Pembagian

     $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}}$

Bidang Kompleks *(lanjutan)*

- **Contoh :**

  Diketahui $\boldsymbol{z_1 = 1 + i}$ dan $\boldsymbol{z_2 = 2 - 2i}$

  1. Penjumlahan

     $\boldsymbol{z_1 + z_2 = 1 + 2 + i(1 - 2) = 3 - i}$

  2. Perkalian

     $\boldsymbol{z_1 . z_2 = 1.2 - (1.-2) + i(1.-2 + 2.1) = 4}$

  3. Pembagian

     $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1.2+(1.-2)}{2^2+(-2)^2} + i\frac{2.1-(1.-2)}{2^2+(-2)^2} = \frac{0}{8} + i\frac{4}{8} = \frac{1}{2}i}$

Bidang Kompleks *(lanjutan)*

- **Sifat-sifat operasi :**
  1. Komutatif
     $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
     $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$
  2. Asosiatif
     $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
     $z_1(z_2 . z_3) = (z_1 . z_2)z_3$
  3. Distributif
     $z_1(z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$

Bidang Kompleks *(lanjutan)*

- **Sifat-sifat operasi :**
  4. Identitas
     $0 + z = z + 0 = z$
     $z . 1 = z$
     $z + (-z) = (-z) + z = 0$

Bilangan Sekawan

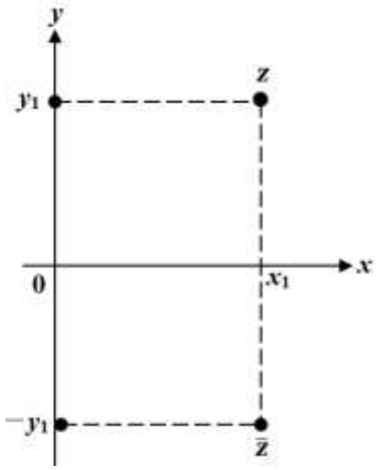
- Jika $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}$, maka sekawan dari $\boldsymbol{z}$ dinotasikan dengan $\bar{\boldsymbol{z}}$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

  $$\bar{z} = x - iy$$

- Jika dihubungkan dengan nilai $\boldsymbol{z}$ dengan $\bar{\boldsymbol{z}}$, maka bagian riil dan imajiner dapat dinyatakan sebagai berikut :

  $$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ dan}$$

  $$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$



Latihan 1

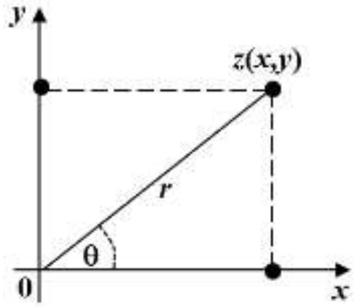
Diketahui $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = 3 - 4i$

1. $3z_1 + 2z_2$
2. $z_1 . z_2$
3. $(z_1 + z_2)^2$
4. $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$
5. $(z_1 - \bar{z}_1)^2$
6. $(z_2 + \bar{z}_2)^2$

Bentuk Polar *(lanjutan)*

- Bilangan kompleks untuk koordinat bidang polar (r,θ) dapat dibuat hubungan sebagai berikut :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arg z = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$



r disebut modulus ***z***
θ disebut argumen ***z***

Jadi ***z*** dapat ditulis dalam bentuk :

$$z = r\cos\theta + i(r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Bentuk Polar *(lanjutan)*

- Secara geometrik, ***r*** merupakan jarak titik ***z*** terhadap titik asalnya **(0,0)**, sedangkan **θ** merupakan sudut ***z*** yang diukur dari sumbu ***x*** positif dan **θ** tidak terdefinisi pada ***z* = 0**.
- Nilai prinsipil **θ** didefinisikan pada **-π** < **θ** < **π**, dikarenakan sifat dari **θ** yang berulang, maka hanya digunakan nilai **θ** pada selang tersebut.

Bentuk Polar *(lanjutan)*

- Untuk memudahkan dapat digunakan sifat operasi pada bidang kompleks dengan :

  $z_1 = r_1 \text{ Cos } \theta_1 + ir_1 \text{ Sin } \theta_1$ dan

  $z_2 = r_2 \text{ Cos } \theta_2 + ir_2 \text{ Sin } \theta_2$

  1. Perkalian :

     $z_1 . z_2 = r_1 r_2 [\text{Cos } (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ Sin } (\theta_1 + \theta_2)]$

  2. Pembagian :

     $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\text{Cos } (\theta_1 - \theta_2) + i \text{ Sin } (\theta_1 - \theta_2)]$

- Hasil operasi tersebut menggunakan sifat :

  $\text{Cos } (\theta_1 \pm \theta_2) = \text{Cos } \theta_1 \text{Cos } \theta_2 \pm \text{Sin } \theta_1 \text{Sin } \theta_2$

  $\text{Sin } (\theta_1 \pm \theta_2) = \text{Sin } \theta_1 \text{Cos } \theta_2 \pm \text{Cos } \theta_1 \text{Sin } \theta_2$

Bentuk Polar *(lanjutan)*

- **Contoh :**

  Diketahui $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = \sqrt{3} + i$

  a. Tentukan modulus $(z_1 z_2)$ dan nilai prinsipil argumen $(z_1 z_2)$

  b. Tentukan modulus $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ dan nilai prinsipil argumen $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

  Jawaban :

  Jika z_1 dan z_2 ditulis dalam bentuk polar :

  $z_1 = \sqrt{2}\left(\text{Cos } \frac{\pi}{4} + i \text{ Sin } \frac{\pi}{4}\right)$ dan

  $z_2 = 2\left(\text{Cos } \frac{\pi}{6} + i \text{ Sin } \frac{\pi}{6}\right)$

Bentuk Polar *(lanjutan)*

a. $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\text{Cos}\,\frac{5\pi}{12}+i\,\text{Sin}\,\frac{5\pi}{12}\right)$

Sehingga modulus $(z_1 z_2) = 2\sqrt{2}$ dan argumen $(z_1 z_2) = \frac{5\pi}{12}$

b. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{Cos}\,\frac{\pi}{12}+i\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{12}\right)$

Sehingga modulus $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dan argumen $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{12}$

Latihan 2

Jika diketahui :

1. $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = -1 - i$
2. $z_1 = 1 - i$ dan $z_2 = -1 + i$

Tentukan modulus $(z_1 z_2)$ dan $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, serta nilai prinsipil argumen $(z_1 z_2)$ dan $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Bentuk Pangkat dan Akar

Dari hasil operasi perkalian bentuk polar dapat diperoleh bentuk pangkat bilangan kompleks $\boldsymbol{z^n}$ yaitu :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z^n} &= \boldsymbol{r.r \dots r}\big(\mathbf{Cos}\ (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} + \cdots + \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{i}\ \mathbf{Sin}(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} + \cdots + \boldsymbol{\theta})\big) \\ &= \boldsymbol{r^n}(\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\ \mathbf{Sin}\ \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Bentuk pangkat $\boldsymbol{z^n}$ dikenal dengan rumus **De Moivre**, yang dari bentuk tersebut dapat diturunkan bentuk akar $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$ yang diperoleh dengan cara sebagai berikut :

- Diketahui bentuk akar bilangan kompleks $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{W}$.
- $\boldsymbol{W}$ mempunyai bentuk polar $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}(\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{i}\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\beta})$, sedangkan $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}(\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\theta})$.

Bentuk Pangkat dan Akar
(lanjutan)

- Nilai $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ ini akan dicari berdasarkan nilai $\boldsymbol{r}$ dan $\boldsymbol{\theta}$.
- Dari bentuk $\boldsymbol{W} = \sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$, dapat diperoleh bentuk $\boldsymbol{W^n} = \boldsymbol{z}$.
- Dari rumus De Moivre $\boldsymbol{W^n} = \boldsymbol{R^n}(\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{n\beta} + \boldsymbol{i}\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{n\beta}) = \boldsymbol{z}$, maka didapatkan persamaan berikut :

  $\boldsymbol{R^n} = \boldsymbol{r}$

  $\boldsymbol{n\beta} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{2}\boldsymbol{\pi k} \rightarrow \boldsymbol{k}$: bilangan bulat
- Nilai $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ bisa diperoleh :

  $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r^{1/n}}$

  $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\theta}+\mathbf{2}\boldsymbol{\pi k}}{\boldsymbol{n}} \rightarrow \boldsymbol{k}$: bilangan bulat

Bentuk Pangkat dan Akar
(lanjutan)

Jika dicoba memasukkan nilai k mulai dari **0, 1, 2, …** akan diperoleh bahwa nilai β akan kembali periodik untuk $k = n$, yang artinya :

- nilai W akan sama untuk $k = 0$ dan $k = n$,
- nilai W akan sama untuk $k = 1$ dan $k = n + 1$, dan seterusnya.

Karena diinginkan nilai W yang berbeda saja, maka :

$$\beta = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \rightarrow \text{untuk } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Bentuk Pangkat dan Akar
(lanjutan)

Jadi akar-akar yang dicari adalah $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dimana untuk :

$$k = 0 \rightarrow w_1 = r^{1/n}\left(\text{Cos}\ \frac{\theta}{n} + i\ \text{Sin}\ \frac{\theta}{n}\right)$$

$$k = 1 \rightarrow w_2 = r^{1/n}\left(\text{Cos}\ \frac{\theta+2\pi}{n} + i\ \text{Sin}\ \frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$k = n-1 \rightarrow w_n = r^{1/n}\left(\text{Cos}\ \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\ \text{Sin}\ \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Bentuk Pangkat dan Akar
(lanjutan)

Untuk kasus khusus $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$, yaitu akar bilangan kompleks yang berbentuk $\sqrt[2]{\boldsymbol{z}}$ dapat juga dicari dengan menggunakan persamaan berikut :

$$\sqrt[2]{\boldsymbol{z}} = \pm\left[\sqrt{\frac{|\mathbf{z}|+\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}} + (\mathbf{sign}\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{i}\sqrt{\frac{|\mathbf{z}|+\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}}\right]$$

dengan ketentuan **sign** $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$ jika $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ dan **sign** $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$ jika $\boldsymbol{y} < \mathbf{0}$.

Rumusan ini diperoleh dengan menggunakan sifat :

$\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}\ \mathbf{Cos}^{\mathbf{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right) - \mathbf{1}$ dan

$\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{1} - \mathbf{2}\ \mathbf{Sin}^{\mathbf{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right)$

Bentuk Pangkat dan Akar
(lanjutan)

Contoh :

Tentukan semua nilai $\boldsymbol{z}$ yang memenuhi $\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$

Jawaban :

$\boldsymbol{z}^{\mathbf{3}} + \mathbf{1} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{z}^{\mathbf{3}} = -\mathbf{1} \rightarrow \boldsymbol{z} = \sqrt[3]{-\mathbf{1}}$ (bentuk akar pangkat 3)

Bilangan kompleks $-\mathbf{1}$ memiliki $\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$ dan $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\pi}$, jika $\boldsymbol{w}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{2}}, \dots, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{n}}$ adalah akar-akar dari $\sqrt[3]{-\mathbf{1}}$, maka :

Bentuk Pangkat dan Akar

(lanjutan)

$$\boldsymbol{k = 0 \rightarrow w_1 = 1\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\boldsymbol{k = 1 \rightarrow w_2 = 1\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\pi+2\pi}{3} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = -1}$$

$$\boldsymbol{k = 2 \rightarrow w_3 = 1\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\pi+4\pi}{3} + i\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Jadi akar-akar yang dimaksud adalah :

$\boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$, $\boldsymbol{-1}$, dan $\boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Latihan 3

Tentukan semua nilai $\boldsymbol{z}$ yang memenuhi :

1. $\boldsymbol{z^2 - 2z + i = 0}$
2. $\boldsymbol{z^2 + 2z - i = 0}$

Turunan

Diketahui fungsi bilangan kompleks yang berbentuk :

$$\boldsymbol{f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)}$$

Fungsi tersebut ekuivalen dengan dua fungsi riil $\boldsymbol{u(x, y)}$ dan $\boldsymbol{v(x, y)}$ yang masing-masing tergantung pada dua variabel riil $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$.

Limit Fungsi :

$$\lim_{z \to z_0} \boldsymbol{f(z) = L}$$

Pengertian limit fungsi adalah untuk semua $\boldsymbol{z}$ yang dekat dengan $\boldsymbol{z_0}$, maka nilai $\boldsymbol{f(z)}$ akan dekat dengan nilai $\boldsymbol{L}$.

Turunan *(lanjutan)*

Pengertian dekat dengan $\boldsymbol{z_0}$ adalah bialngan kompleks yang terletak di dalam cakram buka dengan pusat $\boldsymbol{z_0}$ dengan jari-jari yang sangat kecil.

$\boldsymbol{f(z)}$ dikatakan kontinu di titik $\boldsymbol{z_0}$, jika :

$$\lim_{z \to z_0} \boldsymbol{f(z) = f(z_0)}$$

$\boldsymbol{f(z)}$ dikatakan *differentiable* di titik $\boldsymbol{z_0 \to f'(z_0)}$, jika :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\boldsymbol{f(z) - f(z_0)}}{\boldsymbol{\Delta z}} = \boldsymbol{f'(z_0)} \qquad \textbf{ada}$$

atau

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\boldsymbol{f(z) - f(z_0)}}{\boldsymbol{z - z_0}} = \boldsymbol{f'(z_0)} \qquad \textbf{ada}$$

Turunan *(lanjutan)*

Contoh :

1. Periksa apakah $\mathbf{2x + i\,2y}$ mempunyai turunan? Jika ada, tentukan turunannya!
2. Diketahui $\boldsymbol{f(z) = 3z^2 + 2z}$, tentukan $\boldsymbol{f'(1+i)}$!

Jawaban :

1. $\boldsymbol{f(z) = f(x,y) = 2x + i\,2y}$

$$\boldsymbol{f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}}$$

$$\boldsymbol{= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\big(x+iy+\Delta(x+iy)\big) - f(x+iy)}{\Delta(x+iy)}}$$

Turunan *(lanjutan)*

Jawaban (lanjutan) :

$$\boldsymbol{= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\big(x+\Delta x+i(y+\Delta y)\big) - f(x+iy)}{\Delta(x+iy)}}$$

$$\boldsymbol{= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2x+2\Delta x+2i(y+\Delta y) - 2(x+iy)}{\Delta(x+iy)}}$$

$\boldsymbol{= 2}$ (limitnya ada)

Jadi fungsi bilangan kompleks $\boldsymbol{f(z) = 2x + i\,2y}$ mempunyai turunan $\boldsymbol{f'(z) = 2}$.

Turunan *(lanjutan)*

Jawaban (lanjutan) :

2. Diketahui $f(z) = 3z^2 + 2z$, jika $f(z)$ diberikan dalam bentuk variabel z saja, maka dapat diturunkan secara langsung dengan aturan penurunan biasa.

   Jadi $f'(z) = 6z + 2$, sehingga $f'(1+i) = 6(1+i) + 2$

   $= 8 + 6i$

Latihan 4

a. Tentukan turunan dari fungsi berikut :
   1. $f(x,y) = x^2 + 3x - y^2$
   2. $f(z) = z^2 + 3z$

b. Tentukan $f'(1+i)$ dari fungsi berikut :
   1. $f(z) = (2z-1)^3$
   2. $f(x,y) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y)$

Terima kasih
dan
Semoga Lancar Studinya!