TKS 4007
Matematika III

Deret Fourier

(Pertemuan IX)

Dr. AZ
Jurusan Teknik Sipil
Fakultas Teknik
Universitas Brawijaya

Pendahuluan

Deret Fourier ditemukan oleh ilmuan Perancis, **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830) yang menyatakan bahwa semua bentuk fungsi/sinyal periodik dapat direpresentasikan ke dalam Deret Fourier yang merupakan deret Sinusoidal (sinus & cosinus). Perhatikan gambar sinyal berikut :

Pendahuluan *(lanjutan)*

Gelombang = Getaran = Sinyal = Fungsi (model matematiknya) mengakibatkan tekanan molekul udara di suatu daerah menjadi tinggi & daerah lain rendah. Jika tekanan diukur sebagai fungsi dari ***t***, maka akan diperoleh fungsi periodik ***f*(*t*)**.

Catatan :

1. Jika suatu bentuk sinyal/fungsi tertentu akan berulang dengan bentuk yangg sama dalam setiap periode, maka sinyal tersebut dikatakan sebagai **sinyal periodik**.
2. Gelombang suara merupakan gelombang sinus murni dengan frekwensi tertentu.

Pendahuluan *(lanjutan)*

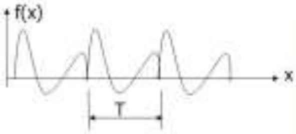
3. Frekwensi resultan gelombang suara merupakan sejumlah nada dengan frekwensi 2, 3, 4, ... kali frekwensi dasar.
4. Frekwensi lebih tinggi berarti periode lebih pendek.
5. Jika $\boldsymbol{\sin\omega t}$ dan $\boldsymbol{\cos\omega t}$ = ferkwensi dasar, maka $\boldsymbol{\sin(n\omega t)}$ dan $\boldsymbol{\sin(n\omega t)}$ = nada harmonik yang lebih tinggi.
6. Kombinasi antara frekwensi dasar & harmoniknya membentuk fungsi periodik dengan periode dasar.
7. Setiap sinyal periodik dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari sinyal-sinyal harmonik.
8. Penjumlahan sinyal-sinyal harmonik dari suatu sinyal periodik dinyatakan dalam **Deret Fourier**.

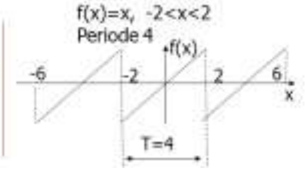
Fungsi/Sinyal Periodik

Fungsi $f(x)$ dikatakan punya periodik **T** atau $f(x)$ periodik dengan periode **T**, jika untuk setiap x berlaku :

$$f(x + \mathrm{T}) = f(x)$$

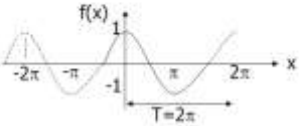
T = konstanta positif (**T** > **0**), nilai terkecil **T** dinamakan periode terkecil atau disingkat $f(x)$. Grafik suatu sinyal/fungsi dengan periode **T** didapat dengan menggambarkan grafik fungsi dasarnya secara berulang seperti gambar berikut :



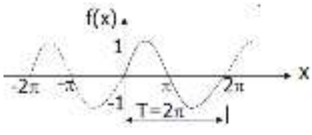


Fungsi/Sinyal Periodik *(lanjutan)*

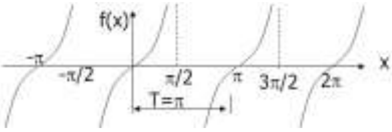
1. Periode dari $f(x) = \cos x$ adalah 2π



2. Periode dari $f(x) = \sin x$ adalah 2π



3. Periode dari $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ adalah π



Deret Fourier *(lanjutan)*

Andaikan ***f***(***x***) adalah sebuah fungsi periodik dengan periode **T** yang terdefinisikan dalam selang dasar $a < x < a + T$, yakni $f(x) = f(x + T)$, maka fungsi ***f***(***x***) dapat diuraikan dalam deret Fourier sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dengan koefisien-koefisien a_0, a_n, dan b_n yang disebut sebagai koefisien-koefisien Fourier, ditentukan oleh fungsi ***f***(***x***) melalui hubungan integral sebagai berikut :

Deret Fourier *(lanjutan)*

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

dengan T = periode dan L = ½ periode.

Contoh

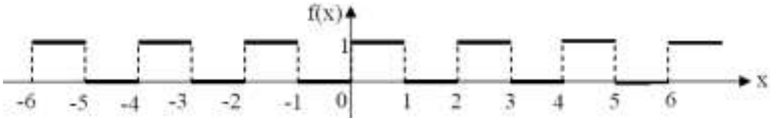
Diketahui fungsi ***f*(*x*)** sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Periodik dengan periode **2**, sehingga $f(x \pm 2) = f(x)$, uraikan fungsi tersebut dalam deret Fourier!

Penyelesaian :

Periode ***T* = 2**, sehingga ***L* = ½ *T* = 1**, interval dasarnya **0 ≤ *x* ≤ 2**, jadi ***a* = 0**. Ekspansi ***f*(*x*)** dalam daerah kiri dan kanan sumbu ***x*** dapat dilihat pada gambar berikut :



Contoh *(lanjutan)*

Koefisien-koefisien Fourier dicari sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx \\ &= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)dx \\ &= 1\left\{\int_0^1 (1)dx + \int_1^2 (0)dx\right\} \\ &= \int_0^1 dx \\ &= x\Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Contoh *(lanjutan)*

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= 1\left\{\int_0^1 (1)\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (0)\cos n\pi x\,dx\right\} \\
&= \int_0^1 \cos n\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Contoh *(lanjutan)*

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}\,dx \\
&= 1\left\{\int_0^1 (1)\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 (0)\sin n\pi x\,dx\right\} \\
&= \int_0^1 \sin n\pi x\,dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, n \text{ ganjil} \\ 0, n\ genap \end{cases}
\end{aligned}
$$

Contoh *(lanjutan)*

Dengan demikian deret Fourier untuk fungsi ***f*(*x*)** adalah :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x} \rightarrow \text{dalam hal ini } \boldsymbol{n = 2k - 1}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi} \sin \pi x + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi x + \cdots \right)}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \cdots \right)}$$

Syarat Dirichlet

Persyaratan sebuah fungsi ***f*(*x*)** agar dapat dinyatakan dalam deret Fourier ditentukan oleh **syarat Dirichlet** sebagai berikut :

Jika (a) ***f*(*x*)** periodik dengan periode ***T***

(b) bernilai tunggal serta kontinu bagian demi bagian dalam interval dasarnya : $\boldsymbol{a \le x \le a + T}$, dan

(c) $\boldsymbol{\int_a^{a+t} |f(x)| dx}$ nilainya berhingga,

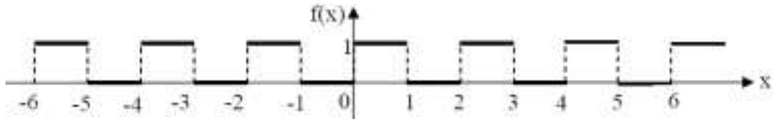
Maka deret Fourier di ruas kanan konvergen ke nilai :

Syarat Dirichlet *(lanjutan)*

- $\boldsymbol{f(x)}$ di semua titik kekontinuan f(x) dan
- ½ $\{\mathbf{lim}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0-}}) + \boldsymbol{lim}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0+}})\}$ di setiap titik ketakkontinuan $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ (pada daerah lompatan).

Contoh :

Pada contoh sebelumnya (perhatikan gambar), tentukanlah konvergen ke nilai berapa deret fourier tersebut di titik-titik kekontinuan $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{2}$ dan di titik-titik ketakkontinuan $\boldsymbol{x}$ = 0, 1, 2, −3.



Syarat Dirichlet *(lanjutan)*

Penyelesaian :

Menurut syarat Dirichlet, maka :

- Di titik-titik kekontinuan :

$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ konvergen ke **1** $\quad$ $\boldsymbol{x = \frac{3}{4}}$ konvergen ke **1**

$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$ konvergen ke **0** $\quad$ $\boldsymbol{x = -\frac{5}{2}}$ konvergen ke **0**

- Di titik-titik ketakkontinuan :

***x* = 0** konvergen ke ½ **(0 + 1)** = ½
***x* = 1** konvergen ke ½ **(1 + 0)** = ½
***x* = 2** konvergen ke ½ **(0 + 1)** = ½
***x* = −3** konvergen ke ½ **(1 + 0)** = ½

Latihan

Diketahui fungsi ***f*(*t*)** sebagai berikut :

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{3}, & \mathbf{-2 < t < 0} \\ \mathbf{-5}, & \mathbf{0 < t < 2} \end{cases}$$

Periodik sehingga $\boldsymbol{f(t+4) = f(t)}$, uraikan fungsi tersebut dalam deret Fourier dan gambarkan bentuk gelombangnya!

Terima kasih
dan
Semoga Lancar Studinya!